Bases Matemáticas

Limites Infinitos, Limites no Infinito, Assíntotas

Rodrigo Hausen

Definição. Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ se, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M$

Definição. Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se, para todo $M < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < M$

Podemos demonstrar pela definição:

Regra 1. Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Regras para limites infinitos

Podemos demonstrar pela definição:

Regra 1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

Regra 2.1 Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **e além disto** $f(x) > 0$ para todo x, então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Regras para limites infinitos

Podemos demonstrar pela definição:

Regra 1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Regra 2.1 Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **e além disto** $f(x) > 0$ para todo x, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Regra 2.2 Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **e além disto** $f(x) < 0$ para todo x, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Regras para limites infinitos

Podemos demonstrar pela definição:

Regra 1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Regra 2.1 Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **e além disto** $f(x) > 0$ para todo x, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Regra 2.2 Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **e além disto** $f(x) < 0$ para todo x, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

(além do limite ser igual a 0, as condições $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$ são **essenciais** para podermos usar 2.1 e 2.2)

Regras para limites infinitos

Regra 3. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$

Regras para limites infinitos

Regra 3. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

Regra 4. Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$ (cuidado com a mudança de sinal no produto!)

Regra 3. Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$

Regra 4. Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$ (cuidado com a mudança de sinal no produto!)

Regra 5. Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty$

Regra 3. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$,
então $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

Regra 4. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$,
então $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$
(cuidado com a mudança de sinal no produto!)

Regra 5. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$,
então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$
(neste caso, o que podemos dizer sobre $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x)$?

Regras para limites infinitos

Regra 3. Se $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$,
então $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

Regra 4. Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$,
então $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$
(cuidado com a mudança de sinal no produto!)

Regra 5. Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$,
então $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$
(neste caso, o que podemos dizer sobre $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$?
Nada, a não ser que analisemos por outra regra!)

Regra 6. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então:

6.1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$

6.2. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

(b) Se $L < 0$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$

6.3. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$. **(b)** Se $L < 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

6.5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Regra 6. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, então:

6.1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$

6.2. **(a)** Se $L > 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$

(b) Se $L < 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty$

6.3. **(a)** Se $L > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$. **(b)** Se $L < 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

6.5. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

(Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, que podemos afirmar sobre $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$?

Regra 6. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então:

6.1. $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$

6.2. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$

(b) Se $L < 0$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty$

6.3. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$. **(b)** Se $L < 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

6.5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

(Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, que podemos afirmar sobre $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$? Nada, a menos que usemos outro método!)

Regra 6. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então:

6.1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$

6.2. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

(b) Se $L < 0$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$

6.3. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$. **(b)** Se $L < 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

6.5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

(Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, que podemos afirmar sobre $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$?
Nada, a menos que usemos outro método!)

Regra 7. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então...

Regra 6. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então:

6.1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = +\infty$

6.2. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$

(b) Se $L < 0$, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$

6.3. **(a)** Se $L > 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$. **(b)** Se $L < 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

6.5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

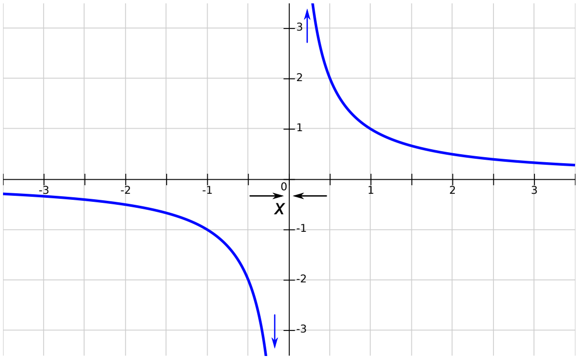
(Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, que podemos afirmar sobre $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$? Nada, a menos que usemos outro método!)

Regra 7. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então...

Estas regras podem ser demonstradas usando-se apenas definições de limite definido e limite infinito. Experimente demonstrar algumas.

Limites laterais infinitos

Note que **não** podemos afirmar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ é $+\infty$ nem $-\infty$



Porém, note que o valor de $1/x$ cresce arbitrariamente à medida que x se aproxima de 0 **pela direita**, e decresce arbitrariamente à medida que x se aproxima de 0 **pela esquerda**.

Limites laterais infinitos

Dados a, b, c, d números reais e f, g, h, j funções reais...

• (limite $+\infty$ pela direita) ... dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - a < \delta \;\;\Rightarrow\;\; f(x) > M$$

Limites laterais infinitos

Dados a, b, c, d números reais e f, g, h, j funções reais...

- (limite $+\infty$ pela direita) ... dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - a < \delta \;\; \Rightarrow \;\; f(x) > M$$

- (limite $+\infty$ pela esquerda) ... dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < a - x < \delta \;\; \Rightarrow \;\; f(x) > M$$

Limites laterais infinitos

Dados a, b, c, d números reais e f, g, h, j funções reais...

• (limite $+\infty$ pela direita) ... dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - a < \delta \;\;\Rightarrow\;\; f(x) > M$$

• (limite $+\infty$ pela esquerda) ... dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < a - x < \delta \;\;\Rightarrow\;\; f(x) > M$$

• (limite $-\infty$ pela direita) ... dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ se para todo $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - a < \delta \;\;\Rightarrow\;\; f(x) < M$$

Dados a, b, c, d números reais e f, g, h, j funções reais...

• (limite $+\infty$ pela direita) ...dizemos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - a < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

• (limite $+\infty$ pela esquerda) ...dizemos que $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < a - x < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

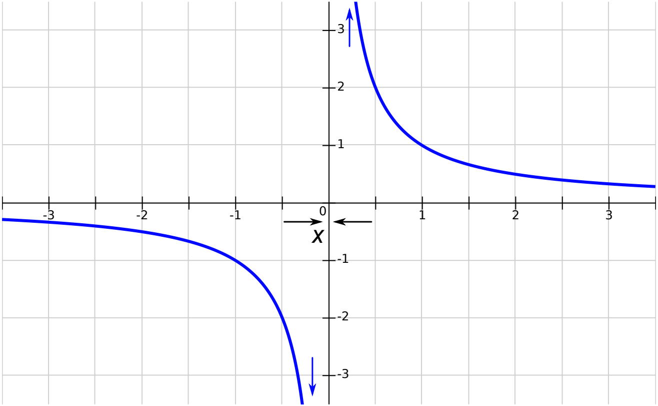
• (limite $-\infty$ pela direita) ...dizemos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ se para todo $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < x - a < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < M$$

• (limite $-\infty$ pela esquerda) ...dizemos que $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ se para todo $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < a - x < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < M$$

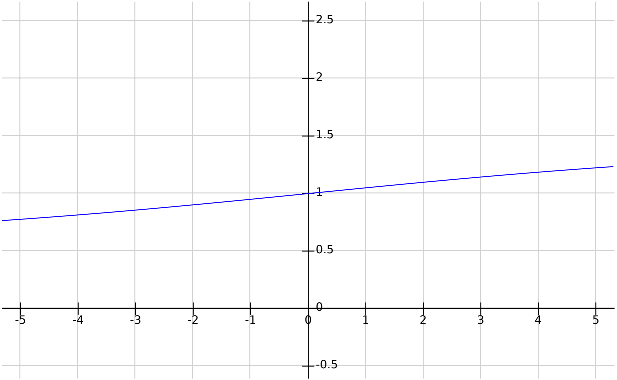
Veja que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e que $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



Para casa: demonstre formalmente (usando a definição).

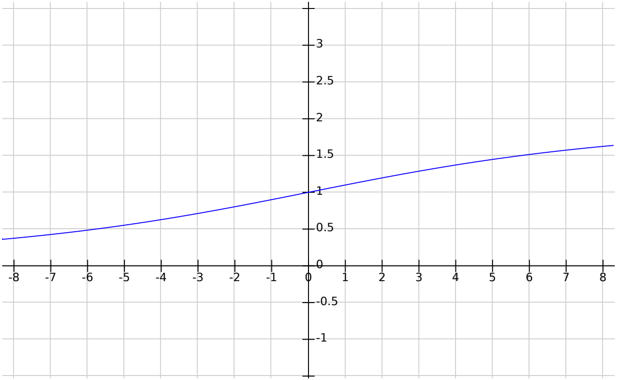
O conceito de limites pode ser expandido para descrevermos melhor o comportamento de funções e gráficos.

Exemplo. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$. Qual o comportamento da função quando x se torna muito grande (positivo)? E quando se torna muito pequeno (negativo)?



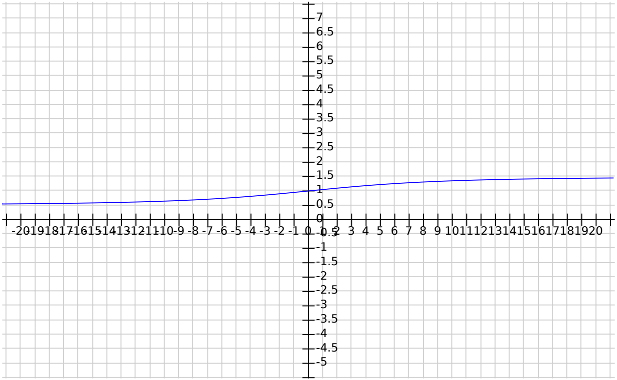
O conceito de limites pode ser expandido para descrevermos melhor o comportamento de funções e gráficos.

Exemplo. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$. Qual o comportamento da função quando x se torna muito grande (positivo)? E quando se torna muito pequeno (negativo)?



O conceito de limites pode ser expandido para descrevermos melhor o comportamento de funções e gráficos.

Exemplo. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$. Qual o comportamento da função quando x se torna muito grande (positivo)? E quando se torna muito pequeno (negativo)?



Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$...

...para x “muito grande:”

x	$f(x)$
1	1,04975186

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$...

...para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339

Limites no infinito

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}} \ldots$

. . . para x “muito grande:”

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$...

... para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}} \ldots$

... para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$ ...

... para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}} \ldots$

. . . para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

. . . para x "muito pequeno:"

x	$f(x)$
-1	0,95024814

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}} \ldots$

...para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

...para x "muito pequeno:"

x	$f(x)$
-1	0,95024814
-10	0,64644661

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$ ...

... para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

... para x "muito pequeno:"

x	$f(x)$
-1	0,95024814
-10	0,64644661
-100	0,50248140

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$ . . .

. . . para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

. . . para x "muito pequeno:"

x	$f(x)$
-1	0,95024814
-10	0,64644661
-100	0,50248140
-1000	0,50002499

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$ . . .

. . . para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

. . . para x "muito pequeno:"

x	$f(x)$
-1	0,95024814
-10	0,64644661
-100	0,50248140
-1000	0,50002499
-10000	0,50000024

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2+400}}$ . . .

. . . para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

. . . para x "muito pequeno:"

x	$f(x)$
-1	0,95024814
-10	0,64644661
-100	0,50248140
-1000	0,50002499
-10000	0,50000024
-10^5	0,50000001

Comportamento de $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$ . . .

. . . para x "muito grande:"

x	$f(x)$
1	1,04975186
10	1,35355339
100	1,49751859
1000	1,49997500
10000	1,49999975
10^5	1,49999999

. . . para x "muito pequeno:"

x	$f(x)$
-1	0,95024814
-10	0,64644661
-100	0,50248140
-1000	0,50002499
-10000	0,50000024
-10^5	0,50000001

Parece que:

- quando x **tende a** números muito grandes, $f(x)$ **tende a** 1,5
- quando x **tende a** números muito pequenos, $f(x)$ **tende a** 0,5

Definição. Dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se:

para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que vale a implicação

$$x > N \ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição. Dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se:

para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que vale a implicação

$$x > N \;\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição. Dizemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se:

para todo $\epsilon > 0$ existe $N < 0$ tal que vale a implicação

$$x < N \;\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição. Dizemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ se:

para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que vale a implicação

$$x > N \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição. Dizemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ se:

para todo $\epsilon > 0$ existe $N < 0$ tal que vale a implicação

$$x < N \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites fundamentais. Das definições, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Definição. Dizemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ se:

para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que vale a implicação

$$x > N \;\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição. Dizemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se:

para todo $\epsilon > 0$ existe $N < 0$ tal que vale a implicação

$$x < N \;\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Limites fundamentais. Das definições, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Regras algébricas. Similares às regras para limites em um ponto.

Limites infinitos: exemplo

Exemplo. Calcule $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sqrt{4x^2 + 400}}{\sqrt{4x^2 + 400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

Exemplo. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} \quad =$$

Exemplo. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} =$$

Limites infinitos: exemplo

Exemplo. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}$$

Exemplo. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}$$

Exemplo. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} = \\
= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} \\
= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} &
\end{aligned}$$

Exemplo. Calcule $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} = \frac{1-\sqrt{4+0}}{-\sqrt{4+0}}$$

Exemplo. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} = \frac{1-\sqrt{4+0}}{-\sqrt{4+0}} = \frac{1-2}{-2} =$$

Exemplo. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} = \frac{1-\sqrt{4+0}}{-\sqrt{4+0}} = \frac{1-2}{-2} = \frac{1}{2}$$

■

Exemplo. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$.

Observe que no caso $x \to -\infty$ consideramos apenas $x < 0$.

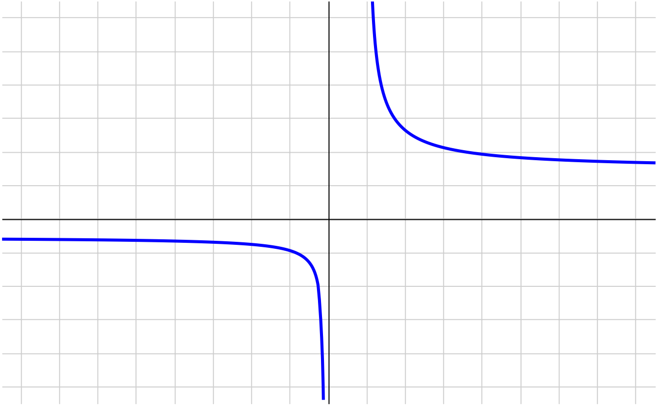
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{400}{x^2}\right)}} = \\
= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{|x|\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-x\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} \\
= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}}{-\sqrt{4+\frac{400}{x^2}}} &= \frac{1-\sqrt{4+0}}{-\sqrt{4+0}} = \frac{1-2}{-2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Para casa. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2+400}}{\sqrt{4x^2+400}}$

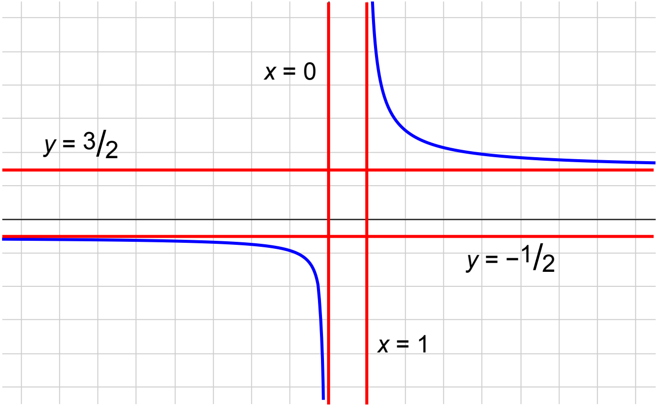
Uma **assíntota de um gráfico** é uma reta do plano para onde o gráfico se aproxima à medida que nos afastamos da origem.

Exemplo: assíntotas de $f(x) = \dfrac{4x - 2 + \sqrt{4x^2 - 4x}}{2\sqrt{4x^2 - 4x}}$



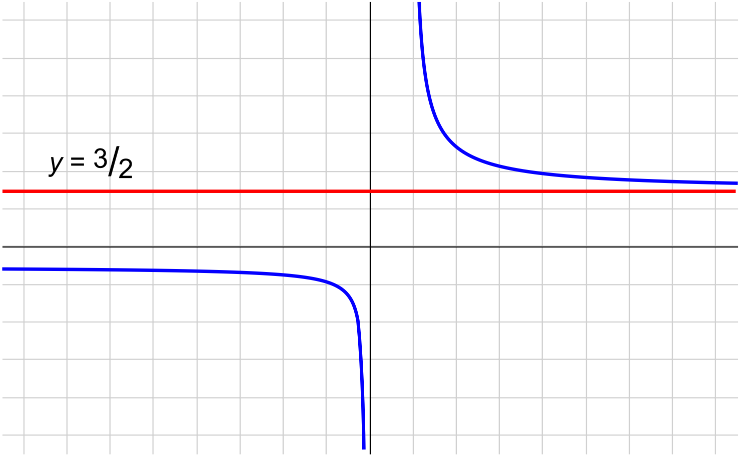
Uma **assíntota de um gráfico** é uma reta do plano para onde o gráfico se aproxima à medida que nos afastamos da origem.

Exemplo: assíntotas de $f(x) = \dfrac{4x - 2 + \sqrt{4x^2 - 4x}}{2\sqrt{4x^2 - 4x}}$



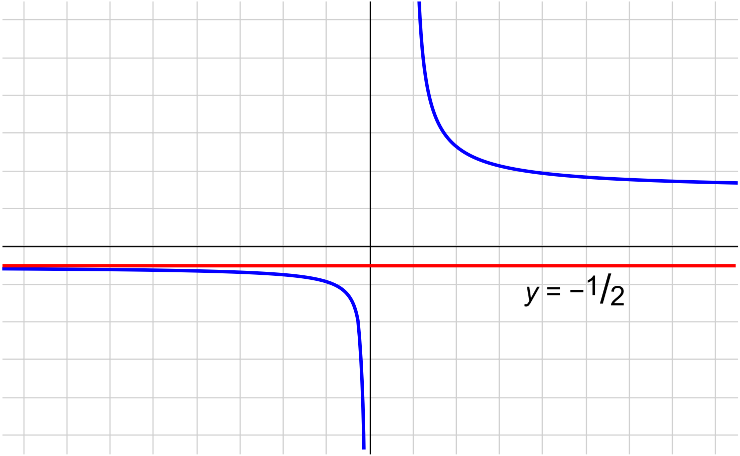
Limites **no infinito** e assíntotas **horizontais**:

$$f(x) = \frac{4x - 2 + \sqrt{4x^2 - 4x}}{2\sqrt{4x^2 - 4x}} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$



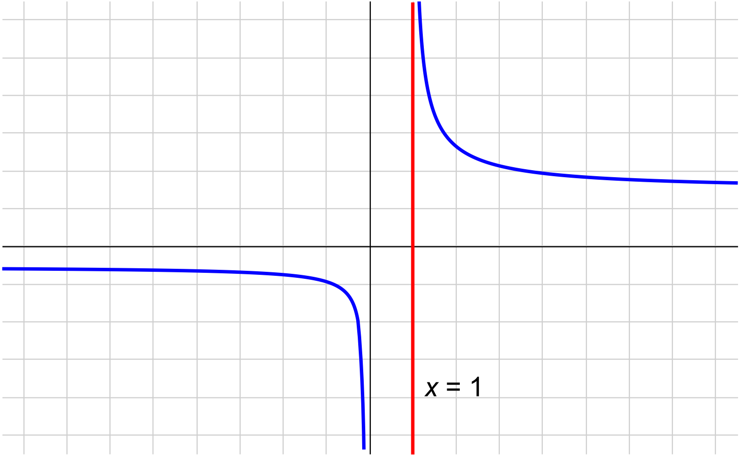
Limites **no infinito** e assíntotas **horizontais**:

$$f(x) = \frac{4x - 2 + \sqrt{4x^2 - 4x}}{2\sqrt{4x^2 - 4x}} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$$



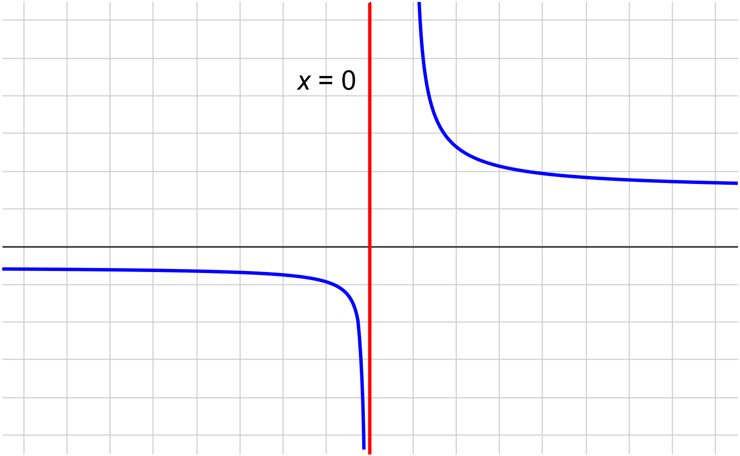
Limites **laterais infinitos** e assíntotas **verticais**:

$$f(x) = \frac{4x - 2 + \sqrt{4x^2 - 4x}}{2\sqrt{4x^2 - 4x}} \qquad \lim_{x \to \mathbf{1}^+} f(x) = +\infty$$



Limites **laterais infinitos** e assíntotas **verticais**:

$$f(x) = \frac{4x - 2 + \sqrt{4x^2 - 4x}}{2\sqrt{4x^2 - 4x}} \qquad \lim_{x \to \mathbf{0}^-} f(x) = -\infty$$



- Um gráfico pode ter 0, 1 ou 2 assíntotas horizontais.

Assíntotas verticais e horizontais

- Um gráfico pode ter 0, 1 ou 2 assíntotas horizontais.
- Um gráfico pode ter 0, 1 ou mais assíntotas verticais.

Assíntotas verticais e horizontais

- Um gráfico pode ter 0, 1 ou 2 assíntotas horizontais.
- Um gráfico pode ter 0, 1 ou mais assíntotas verticais.
- Um gráfico pode ter assíntotas que não são nem horizontais, nem verticais, p. ex. $\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} + x$

- Um gráfico pode ter 0, 1 ou 2 assíntotas horizontais.
- Um gráfico pode ter 0, 1 ou mais assíntotas verticais.
- Um gráfico pode ter assíntotas que não são nem horizontais, nem verticais, p. ex. $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + x$

Para casa: Seja $f(x) = \dfrac{4x - 2 + \sqrt{4x^2 - 4x}}{2\sqrt{4x^2 - 4x}}$. Demonstre que:

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Discuta: no gráfico de $f(x)$, é possível haver mais alguma assíntota vertical além das retas $x = 0$ e $x = 1$? Por que não?

Para casa

- Stewart: Seções 2.1, 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6, com especial atenção para os limites no infinito e os limites infinitos.
- Exercícios: lista 10, todos exceto questões 4 e 10.