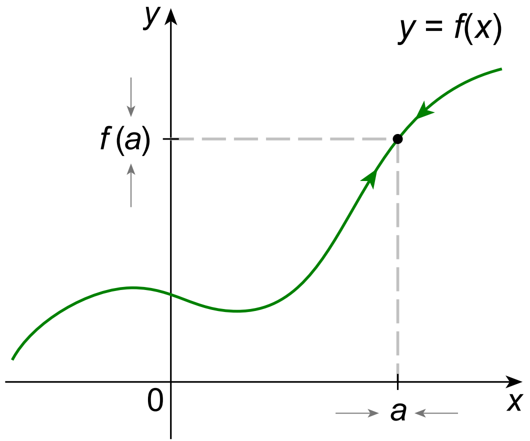
Bases Matemáticas

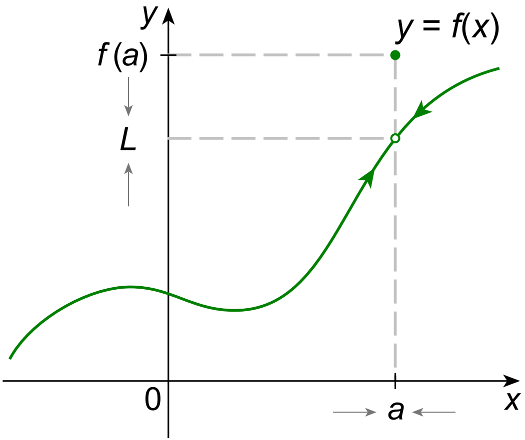
Continuidade e o Teorema do Valor Intermediário

Rodrigo Hausen

Informalmente: no gráfico, não apresenta "quebra" ou "furo" para $x = a$.



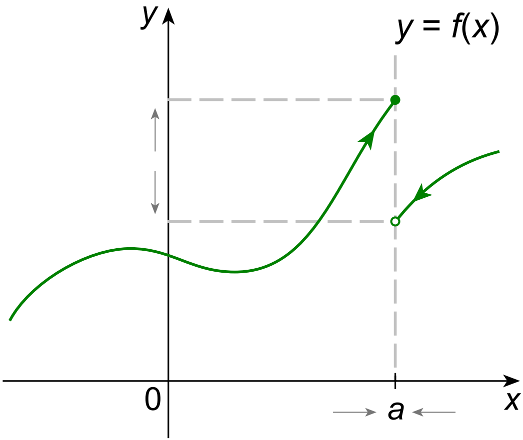
Não é contínua em a pois apresenta "furo."



$f(a)$ existe, mas $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Função descontínua em a

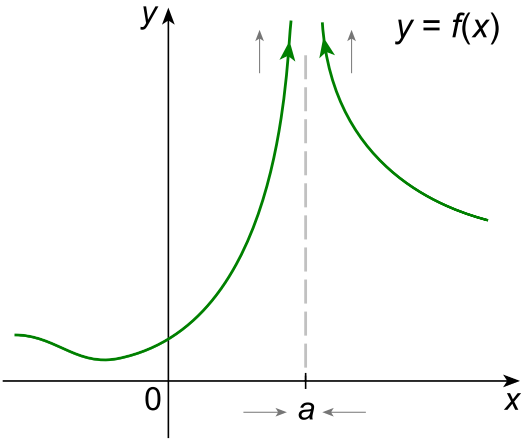
Não é contínua em a pois apresenta "quebra."



$$f(a) \text{ existe, mas } \lim_{x\to a} f(x) \text{ indeterminado}$$

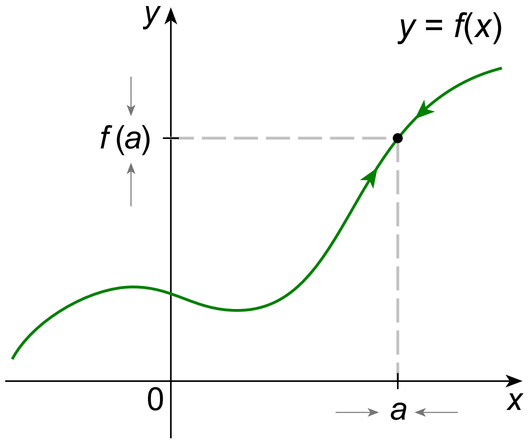
Função descontínua em a

Não é contínua em a pois apresenta "quebra."



$f(a)$ não existe e $\lim_{x \to a} f(x)$ indeterminado

Definição. Uma função real é dita **contínua em** a se **todas** as 3 condições abaixo são verdadeiras.



1) $f(a)$ está definido; 2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe; e 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 1. Para quais valores de a a função
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$ é contínua? Para quais é descontínua?

Exemplo 1. Para quais valores de a a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$ é contínua? Para quais é descontínua?

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

Exemplo 1. Para quais valores de a a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$ é contínua? Para quais é descontínua?

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

Se $x \neq -1$ e $x \neq 2$, então

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = x - 1.$$

Exemplo 1. Para quais valores de a a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$ é contínua? Para quais é descontínua?

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

Se $x \neq -1$ e $x \neq 2$, então

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = x - 1.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1) * (x-2)} = \lim\limits_{x \to a} (x-1) = a - 1.$

Exemplo 1. Para quais valores de a a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$ é contínua? Para quais é descontínua?

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

Se $x \neq -1$ e $x \neq 2$, então

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = x - 1.$$

Logo, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \dfrac{(x+1)(x-2)(x-1)}{(x+1) * (x-2)} = \lim_{x \to a} (x-1) = a - 1.$

Note que o $\lim_{x \to a} f(x) = a - 1$ está definido para todo $a \in \mathbb{R}$, **mas**:

- Se $a \in \{-1, 2\}$, $f(a)$ indefinido (não é contínua)
- Se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (contínua)

Exemplo 2. Seja $g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Demonstramos anteriormente:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ (limite fundamental)
- $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$ (exercício para casa)

Exemplo 2. Seja $g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Demonstramos anteriormente:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ (limite fundamental)
- $\lim\limits_{x \to a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a)$ (exercício para casa)

Logo, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\text{sen}(a)}{a}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Exemplo 2. Seja $g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Demonstramos anteriormente:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} = 1$ (limite fundamental)
- $\lim\limits_{x \to a} \text{sen}\,(x) = \text{sen}\,(a)$ (exercício para casa)

Logo, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\text{sen}(a)}{a}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Veja que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} = g(a)$, logo g é contínua em a para todo $a \in \mathbb{R}$.

Funções contínuas

Teorema. São funções contínuas para todo a **no seu domínio**:

- Polinomiais $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Dom $p = \mathbb{R}$)

Teorema. São funções contínuas para todo a **no seu domínio**:

- Polinomiais $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Dom $p = \mathbb{R}$)
- Racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinomiais
  (Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) = 0\}$)

Teorema. São funções contínuas para todo *a* **no seu domínio**:

- Polinomiais $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Dom $p = \mathbb{R}$)
- Racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinomiais
  (Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$)
- Raízes $f(x) = \sqrt[n]{x}$
  (se n par, Dom $f = [0, +\infty)$; se n ímpar, Dom $f = \mathbb{R}$)

Teorema. São funções contínuas para todo a **no seu domínio**:

- Polinomiais $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Dom $p = \mathbb{R}$)
- Racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinomiais (Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) = 0\}$)
- Raízes $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (se n par, Dom $f = [0, +\infty)$; se n ímpar, Dom $f = \mathbb{R}$)
- Exponenciais $f(x) = c^x$, $c > 0$ e $c \neq 1$ (Dom $f = \mathbb{R}$)

Teorema. São funções contínuas para todo *a* **no seu domínio**:

- Polinomiais $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Dom $p = \mathbb{R}$)
- Racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinomiais
  (Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) = 0\}$)
- Raízes $f(x) = \sqrt[n]{x}$
  (se n par, Dom $f = [0, +\infty)$; se n ímpar, Dom $f = \mathbb{R}$)
- Exponenciais $f(x) = c^x$, $c > 0$ e $c \neq 1$ (Dom $f = \mathbb{R}$)
- Logarítmicas $f(x) = \log_c(x)$, $c > 0$ e $c \neq 1$
  (Dom $\log_c = (0, +\infty)$)

Teorema. São funções contínuas para todo a **no seu domínio**:

- Polinomiais $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Dom $p = \mathbb{R}$)
- Racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinomiais
  (Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) = 0\}$)
- Raízes $f(x) = \sqrt[n]{x}$
  (se n par, Dom $f = [0, +\infty)$; se n ímpar, Dom $f = \mathbb{R}$)
- Exponenciais $f(x) = c^x$, $c > 0$ e $c \neq 1$ (Dom $f = \mathbb{R}$)
- Logarítmicas $f(x) = \log_c(x)$, $c > 0$ e $c \neq 1$
  (Dom $\log_c = (0, +\infty)$)
- Trigonométricas: sen, cos, tan, sec, cosec
  (cuidado com o domínio de cada uma!)

Teorema. São funções contínuas para todo *a* **no seu domínio**:

- Polinomiais $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Dom $p = \mathbb{R}$)
- Racionais $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q polinomiais
  (Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) = 0\}$)
- Raízes $f(x) = \sqrt[n]{x}$
  (se n par, Dom $f = [0, +\infty)$; se n ímpar, Dom $f = \mathbb{R}$)
- Exponenciais $f(x) = c^x$, $c > 0$ e $c \neq 1$ (Dom $f = \mathbb{R}$)
- Logarítmicas $f(x) = \log_c(x)$, $c > 0$ e $c \neq 1$
  (Dom $\log_c = (0, +\infty)$)
- Trigonométricas: sen, cos, tan, sec, cosec
  (cuidado com o domínio de cada uma!)
- Trigonométricas inversas: asen, acos, atan, asec, acosec
  (cuidado com o domínio de cada uma!)

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Primeiramente, veja que $\lim_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} =$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Primeiramente, veja que $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} =$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Primeiramente, veja que $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} =$
$\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} =$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Primeiramente, veja que $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

Teorema. se f é contínua em b e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Primeiramente, veja que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

Sabemos que arcsen é contínua em seu domínio, que é $[-1, 1]$.

Teorema. se f é contínua em b e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Primeiramente, veja que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

Sabemos que arcsen é contínua em seu domínio, que é $[-1, 1]$.

Como $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \dfrac{1}{2}$ esté no domínio de arcsen, então

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Antes de demonstrar o teorema, um exemplo de aplicação.

Exemplo 3. Avalie $\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Primeiramente, veja que $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

Sabemos que arcsen é contínua em seu domínio, que é $[-1, 1]$.

Como $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{2}$ esté no domínio de arcsen, então $\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$. ■

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 &\quad\Rightarrow\quad |g(x) - b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x - b| < \delta_2 &\quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x-b| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Seja $y = g(x)$ e reescrevamos a segunda implicação; não precisamos nos preocupar em fazer $y \neq b$ pois f é contínua em b.

$$|y-b| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(b)| < \epsilon_2.$$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_1 &\quad\Rightarrow\quad |g(x)-b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x-b| < \delta_2 &\quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Seja $y = g(x)$ e reescrevamos a segunda implicação; não precisamos nos preocupar em fazer $y \neq b$ pois f é contínua em b.

$$|y-b| < \delta_2 \quad\Rightarrow\quad |f(y)-f(b)| < \epsilon_2.$$

Dado $\epsilon > 0$, faça $\epsilon_2 = \epsilon$ e obtenha δ_2.

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |g(x)-b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x-b| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x)-f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Seja $y = g(x)$ e reescrevamos a segunda implicação; não precisamos nos preocupar em fazer $y \neq b$ pois f é contínua em b.

$$|y-b| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(y)-f(b)| < \epsilon_2.$$

Dado $\epsilon > 0$, faça $\epsilon_2 = \epsilon$ e obtenha δ_2. Agora, faça $\epsilon_1 = \delta_2$ e obtenha δ_1.

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x - b| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Seja $y = g(x)$ e reescrevamos a segunda implicação; não precisamos nos preocupar em fazer $y \neq b$ pois f é contínua em b.

$$|y - b| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(b)| < \epsilon_2.$$

Dado $\epsilon > 0$, faça $\epsilon_2 = \epsilon$ e obtenha δ_2. Agora, faça $\epsilon_1 = \delta_2$ e obtenha δ_1. Por último, faça $\delta = \delta_1$.

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x - b| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Seja $y = g(x)$ e reescrevamos a segunda implicação; não precisamos nos preocupar em fazer $y \neq b$ pois f é contínua em b.

$$|y - b| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(b)| < \epsilon_2.$$

Dado $\epsilon > 0$, faça $\epsilon_2 = \epsilon$ e obtenha δ_2. Agora, faça $\epsilon_1 = \delta_2$ e obtenha δ_1. Por último, faça $\delta = \delta_1$. Assim, temos

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |y - b| < \epsilon_1$$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 &\quad\Rightarrow\quad |g(x) - b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x - b| < \delta_2 &\quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Seja $y = g(x)$ e reescrevamos a segunda implicação; não precisamos nos preocupar em fazer $y \neq b$ pois f é contínua em b.

$$|y - b| < \delta_2 \quad\Rightarrow\quad |f(y) - f(b)| < \epsilon_2.$$

Dado $\epsilon > 0$, faça $\epsilon_2 = \epsilon$ e obtenha δ_2. Agora, faça $\epsilon_1 = \delta_2$ e obtenha δ_1. Por último, faça $\delta = \delta_1$. Assim, temos

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |y - b| < \epsilon_1 = \delta_2$$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Demonstração. Para todos $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - b| < \epsilon_1 \\ 0 < |x-b| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(b)| < \epsilon_2. \end{aligned}$$

Seja $y = g(x)$ e reescrevamos a segunda implicação; não precisamos nos preocupar em fazer $y \neq b$ pois f é contínua em b.

$$|y - b| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(b)| < \epsilon_2.$$

Dado $\epsilon > 0$, faça $\epsilon_2 = \epsilon$ e obtenha δ_2. Agora, faça $\epsilon_1 = \delta_2$ e obtenha δ_1. Por último, faça $\delta = \delta_1$. Assim, temos

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |y-b| < \epsilon_1 = \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon \qquad \blacksquare$$

Teorema. se f é contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

Consequência imediata do teorema:
Sejam f, g tais que g é contínua em a, f contínua em $g(a)$. Então, a função composta $f \circ g$ é contínua em a.

Obs.: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Aplicações (solução na lousa)

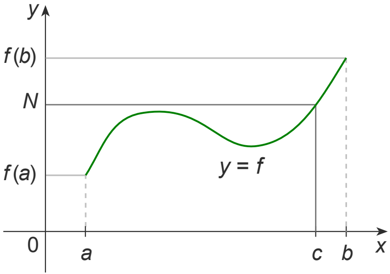
Exemplo 4: Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ fazendo a substituição $u = \sqrt{x^2+3}$

Exemplo 5: Demonstre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(cx)}{cx} = 1$, onde $c \neq 0$ é constante.

Cuidado ao substituir as variáveis! O valor para onde estamos fazendo convergir a variável pode se alterar!

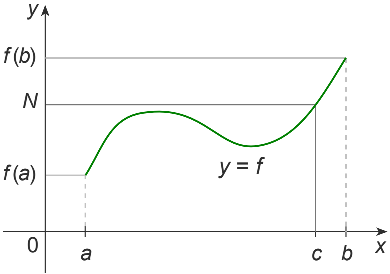
Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$ se f é contínua para todo x tal que $a \leq x \leq b$.

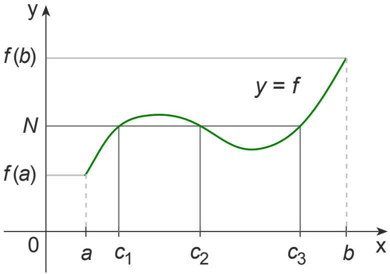
Teorema do Valor Intermediário. Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.



Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo $[a,b]$ se f é contínua para todo x tal que $a \leq x \leq b$.

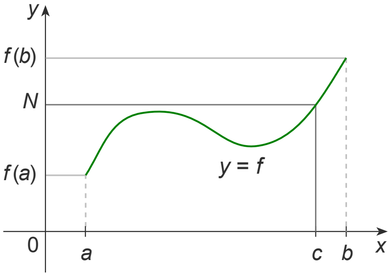
Teorema do Valor Intermediário. Seja f contínua em $[a,b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y$.

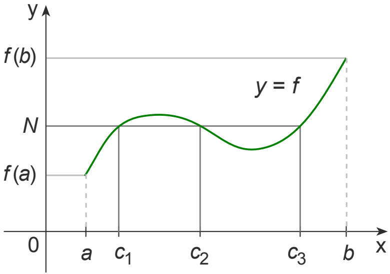




Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$ se f é contínua para todo x tal que $a \leq x \leq b$.

Teorema do Valor Intermediário. Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.





A sua demonstração depende do Axioma da Completude e de um conceito chamado *supremo* de um conjunto.

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Teorema do Valor Intermediário: consequência

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1, 2]$.

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a,b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1,2]$.

Calcule: $f(1) =$

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1, 2]$.

Calcule: $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 =$

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a,b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1,2]$.

Calcule: $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1$
$f(2) =$

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1, 2]$.

Calcule: $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1$
$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 =$

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a,b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1,2]$.

Calcule: $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1$

$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12$

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1, 2]$.

Calcule: $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1$
$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12$

Veja que $f(1) < 0 < f(2)$ (ou seja, 0 é um valor entre $f(1)$ e $f(2)$, onde $f(1) \neq f(2)$).

Teorema do Valor Intermediário: consequência

Teorema do Valor Intermediário (TVI). Seja f contínua em $[a, b]$, e seja y um valor qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Exemplo 6. Demonstre que há uma raiz de $4x^3 - 6x^2 + 3x = 2$ entre 1 e 2.

Solução: seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Como f é uma função polinomial, ela é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, é contínua em $[1, 2]$.

Calcule: $f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1$
$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12$

Veja que $f(1) < 0 < f(2)$ (ou seja, 0 é um valor entre $f(1)$ e $f(2)$, onde $f(1) \neq f(2)$).

Pelo TVI, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja c é raiz de f. ■

Para casa

- Stewart: Seção 2.5 (continuidade).
- Lista 9: **toda**