Bases Matemáticas

Teorema do Confronto e Limites Laterais

Rodrigo Hausen

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para todo número real $\epsilon > 0$, existe algum número real $\delta > 0$ tal que a implicação abaixo é válida

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

Dois limites fundamentais:

- Se c é constante, $\lim_{x \to a} c = c$
- $\lim_{x \to a} x = x$

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$. Então:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- Se $M \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$
- Se n é natural, $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = L^n$
- Se n é natural ímpar, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- Se n é natural par e $M \geq 0$ ou $f(x) \geq 0$ para todo x, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$

Teorema do Confronto

Demonstre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$,

Teorema do Confronto

Demonstre que $\lim_{x \to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, mas $\lim_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Teorema do Confronto

Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, mas $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Vamos fazer um gráfico para tentar estimar $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, mas $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Vamos fazer um gráfico para tentar estimar $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

Palpite: este limite é igual a 0.
Podemos demonstrar usando a definição.

Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, mas $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Vamos fazer um gráfico para tentar estimar $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

Palpite: este limite é igual a 0.
Podemos demonstrar usando a definição.

Tem um jeito mais fácil?

Demonstre que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, mas $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Vamos fazer um gráfico para tentar estimar $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

Palpite: este limite é igual a 0.
Podemos demonstrar usando a definição.

Tem um jeito mais fácil?

Veja que o gráfico de $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ está “ensanduichado” entre os gráficos de x^2 e de $-x^2$,

Teorema do Confronto

Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, mas $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Vamos fazer um gráfico para tentar estimar $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

Palpite: este limite é igual a 0.
Podemos demonstrar usando a definição.

Tem um jeito mais fácil?

Veja que o gráfico de $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ está "ensanduichado" entre os gráficos de x^2 e de $-x^2$, e que $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$.

Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, mas $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Vamos fazer um gráfico para tentar estimar $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

Palpite: este limite é igual a 0.
Podemos demonstrar usando a definição.

Tem um jeito mais fácil?

Veja que o gráfico de $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ está "ensanduichado" entre os gráficos de x^2 e de $-x^2$, e que $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$. Será que disto podemos concluir que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$?

Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Tentando pela regra do produto: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, mas $\lim_{x\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = ???$

Vamos fazer um gráfico para tentar estimar $\lim_{x\to 0} x^2 \text{sen}\,(1/x)$.

Palpite: este limite é igual a 0.
Podemos demonstrar usando a definição.

Tem um jeito mais fácil?

Veja que o gráfico de $x^2\text{sen}\,(1/x)$ está "ensanduichado" entre os gráficos de x^2 e de $-x^2$, e que $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$. Será que disto podemos concluir que $\lim_{x\to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$?

Felizmente, temos um teorema para isto!

Teorema do confronto ou **Teorema do sanduíche** ou **Teorema dos dois policiais e um bêbado:**

Sejam f, g, h funções tais que **ambas** as propriedades abaixo são válidas:

$$\textbf{(1)} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \text{e} \qquad \textbf{(2)} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

ENTÃO, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Interpretação gráfica na lousa.

Teorema do confronto ou **Teorema do sanduíche** ou **Teorema dos dois policiais e um bêbado:**

Sejam f, g, h funções tais que **ambas** as propriedades abaixo são válidas para todo $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$ onde I é um intervalo aberto que contém a:

(1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e **(2)** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

ENTÃO, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Interpretação gráfica na lousa.

Teorema do confronto ou **Teorema do sanduíche** ou **Teorema dos dois policiais e um bêbado:**

Sejam f, g, h funções tais que **ambas** as propriedades abaixo são válidas para todo $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$ onde I é um intervalo aberto que contém a:

(1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e **(2)** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

ENTÃO, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Interpretação gráfica na lousa.

Deixaremos a demonstração para depois. Vamos aplicá-lo.

Teorema. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

Teorema do Confronto: limites fundamentais

Teorema. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

Demonstração. Veja que, para $-\pi/2 < x < \pi/2$, é verdade que $-|x| < \operatorname{sen}(x) < |x|$ (argumento geométrico na lousa).

Teorema do Confronto: limites fundamentais

Teorema. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

Demonstração. Veja que, para $-\pi/2 < x < \pi/2$, é verdade que $-|x| < \operatorname{sen}(x) < |x|$ (argumento geométrico na lousa). Como $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ e $\lim_{x \to 0} -|x| = 0$, então $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$. ■

Teorema. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

Demonstração. Veja que, para $-\pi/2 < x < \pi/2$, é verdade que $-|x| < \operatorname{sen}(x) < |x|$ (argumento geométrico na lousa). Como $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ e $\lim_{x \to 0} -|x| = 0$, então $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$. ■

Para casa:

1) use o Teorema do Confronto para demonstrar que $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$

2) usando a definição de limite, demonstre que se $\lim_{x \to 0} f(x + a) = L$ então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

3) demonstre que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$, e $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$.
Dica para problema 3: use o limite fundamental recém-demonstrado, identidades trigonométricas e as propriedades demonstradas em (1) e (2).

Teorema. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

Teorema. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

Demonstração. Por comparação de áreas no círculo trigonométrico, veja que $\cos(x) < \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1$ (na lousa).

Teorema. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

Demonstração. Por comparação de áreas no círculo trigonométrico, veja que $\cos(x) < \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1$ (na lousa). Note que $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$ e que $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$, logo pelo Teorema do Confronto temos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$. ∎

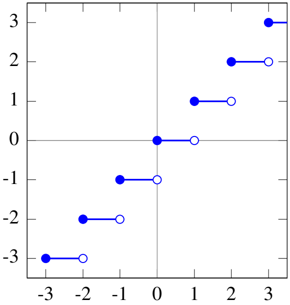
Teorema do Confronto: limite fundamental

Teorema. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} = 1$

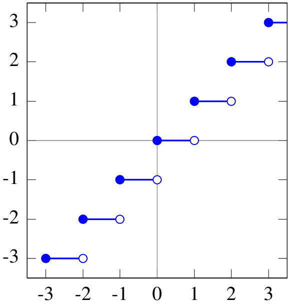
Demonstração. Por comparação de áreas no círculo trigonométrico, veja que $\cos(x) < \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} < 1$ (na lousa). Note que $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$ e que $\lim_{x \to 0} 1 = 1$, logo pelo Teorema do Confronto temos que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} = 1$. ∎

Agora, podemos adotar $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} = 1$ como um limite fundamental.

Já vimos, por exemplo, que $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$ não existe, pois a função piso não se aproxima de um valor único à medida que x tende a um número inteiro.



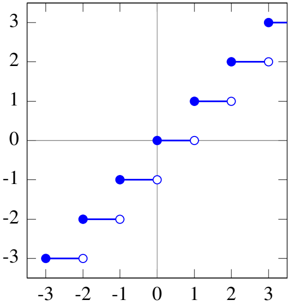
Já vimos, por exemplo, que $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$ não existe, pois a função piso não se aproxima de um valor único à medida que x tende a um número inteiro.



Porém, note que se x **tende a** 1 **pela esquerda** (ou seja, para $x < 1$), o valor de $\lfloor x \rfloor$ tende a 0.

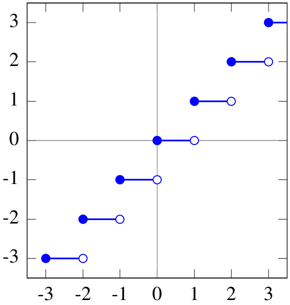
Limites laterais

Já vimos, por exemplo, que $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$ não existe, pois a função piso não se aproxima de um valor único à medida que x tende a um número inteiro.



Porém, note que se x **tende a** 1 **pela esquerda** (ou seja, para $x < 1$), o valor de $\lfloor x \rfloor$ tende a 0. Por outro lado, se **tende a** 1 **pela direita**, o valor de $\lfloor x \rfloor$ tende a 1.

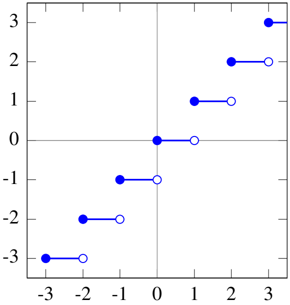
Já vimos, por exemplo, que $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor$ não existe, pois a função piso não se aproxima de um valor único à medida que x tende a um número inteiro.



Porém, note que se x **tende a** 1 **pela esquerda** (ou seja, para $x < 1$), o valor de $\lfloor x \rfloor$ tende a 0. Por outro lado, se **tende a** 1 **pela direita**, o valor de $\lfloor x \rfloor$ tende a 1.

- valor de $f(x)$ para x tendendo a a pela **esquerda**: $\lim_{x\to a^-} f(x)$

Já vimos, por exemplo, que $\lim_{x\to 1}\lfloor x\rfloor$ não existe, pois a função piso não se aproxima de um valor único à medida que x tende a um número inteiro.



Porém, note que se x **tende a** 1 **pela esquerda** (ou seja, para $x < 1$), o valor de $\lfloor x\rfloor$ tende a 0. Por outro lado, se **tende a** 1 **pela direita**, o valor de $\lfloor x\rfloor$ tende a 1.

- valor de $f(x)$ para x tendendo a a pela **esquerda**: $\lim_{x\to a^-} f(x)$
- valor de $f(x)$ para x tendendo a a pela **direita**: $\lim_{x\to a^+} f(x)$

Limites laterais: definição

Dados f função real e a, L números reais...

Limite pela esquerda: ...dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ (note, pelo antecedente da implicação, que $x < a$)

Dados f função real e a, L números reais...

Limite pela esquerda: ... dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

(note, pelo antecedente da implicação, que $x < a$)

Limite pela direita: ... dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

(note, pelo antecedente da implicação, que $x > a$)

Limites laterais: definição

Dados f função real e a, L números reais...

Limite pela esquerda: ...dizemos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

(note, pelo antecedente da implicação, que $x < a$)

Limite pela direita: ...dizemos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

(note, pelo antecedente da implicação, que $x > a$)

Para os limites laterais também valem as regras algébricas e o Teorema do Confronto.

Exemplo. Determine $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Exemplo. Determine $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|} =$

Exemplo. Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} =$

Exemplo. Determine $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 =$

Limites laterais: exemplos

Exemplo. Determine $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$

Limites laterais: exemplos

Exemplo. Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1.$
Para $x < 0$ temos que $|x| = -x$, logo
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} =$

Exemplo. Determine $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1.$
Para $x < 0$ temos que $|x| = -x$, logo
$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} =$

Exemplo. Determine $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$
Para $x < 0$ temos que $|x| = -x$, logo
$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -1 =$

Exemplo. Determine $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$
Para $x < 0$ temos que $|x| = -x$, logo
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$$
■

Exemplo. Determine $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1.$
Para $x < 0$ temos que $|x| = -x$, logo
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{-x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1.$ ∎

Veja que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ não existe!

Limites laterais: exemplos

Exemplo. Determine $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$
Para $x < 0$ temos que $|x| = -x$, logo
$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$ ■

Veja que $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ não existe! Aliás, podemos mostrar que...

Teorema. $\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$

Exemplo. Determine $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$.

Solução. Note que, para $x > 0$ temos que $|x| = x$, logo
$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$
Para $x < 0$ temos que $|x| = -x$, logo
$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$ ∎

Veja que $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ não existe! Aliás, podemos mostrar que...

Teorema. $\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$

Consequência: se $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$, então $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe.

Soluções na lousa.

- demonstre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

- determine se $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe, onde

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{se} \quad x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se} \quad x < 4. \end{cases}$$

  Se o limite existir, determine-o.

Para casa

- Stewart: seções **2.3** (toda) e **2.4** (exceto limites infinitos).
- Exercícios: **1** a **5**, **8** a **9**, **13** a **17** da Lista 9.

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Demonstração do Teorema do Confronto

Por hipótese, temos que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$.

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{array}{lcrcl} 0 < |x-a| < \delta_1 & \Rightarrow & |f(x) - L| & < & \epsilon \\ 0 < |x-a| < \delta_2 & \Rightarrow & |h(x) - L| & < & \epsilon \end{array}$$

Demonstração do Teorema do Confronto

Por hipótese, temos que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$.

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
0 < |x-a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad -\epsilon < f(x) - L < \epsilon \\
0 < |x-a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |h(x) - L| < \epsilon
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema do Confronto

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |h(x) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema do Confronto

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon \; < \; f(x) \; < \; L + \epsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon \; < \; h(x) \; < \; L + \epsilon \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema do Confronto

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{array}{lcl} 0 < |x - a| < \delta_1 & \Rightarrow & L - \epsilon \; < \; f(x) \; < \; L + \epsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_2 & \Rightarrow & L - \epsilon \; < \; h(x) \; < \; L + \epsilon \end{array}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, se $0 < |x - a| < \delta$ então temos que $L - \epsilon < f(x)$ e $h(x) < L + \epsilon$ são verdade.

Demonstração do Teorema do Confronto

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon \ < \ f(x) \ < \ L + \epsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon \ < \ h(x) \ < \ L + \epsilon \end{aligned}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, se $0 < |x - a| < \delta$ então temos que $L - \epsilon < f(x)$ e $h(x) < L + \epsilon$ são verdade.

Como também temos que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ por hipótese, então

$$L - \epsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \epsilon$$

toda vez que $0 < |x - a| < \delta$,

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$.

Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon \ < \ f(x) \ < \ L + \epsilon \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad L - \epsilon \ < \ h(x) \ < \ L + \epsilon \end{aligned}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, se $0 < |x - a| < \delta$ então temos que $L - \epsilon < f(x)$ e $h(x) < L + \epsilon$ são verdade.

Como também temos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ por hipótese, então

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$

toda vez que $0 < |x - a| < \delta$, ou seja,
$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - L| < \epsilon$. ■