Bases Matemáticas

Aula 16 – Introdução aos limites

Rodrigo Hausen

Problema 1 (problema da velocidade instantânea)

Seja $s(t)$ a **posição**, dependendo da variável **tempo** t, de um corpo móvel sobre um eixo.

Problema 1 (problema da velocidade instantânea)

Seja $s(t)$ a **posição**, dependendo da variável **tempo** t, de um corpo móvel sobre um eixo.

A **velocidade média** de um móvel entre dois instantes t_0 e t_1 é

$$\frac{\text{variação na posição}}{\text{variação no tempo}}$$

Problema 1 (problema da velocidade instantânea)

Seja $s(t)$ a **posição**, dependendo da variável **tempo** t, de um corpo móvel sobre um eixo.

A **velocidade média** de um móvel entre dois instantes t_0 e t_1 é

$$\frac{\text{variação na posição}}{\text{variação no tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Problema 1 (problema da velocidade instantânea)

Seja $s(t)$ a **posição**, dependendo da variável **tempo** t, de um corpo móvel sobre um eixo.

A **velocidade média** de um móvel entre dois instantes t_0 e t_1 é

$$\frac{\text{variação na posição}}{\text{variação no tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Interpretação geométrica na lousa.

Problema 1 (problema da velocidade instantânea)

Seja $s(t)$ a **posição**, dependendo da variável **tempo** t, de um corpo móvel sobre um eixo.

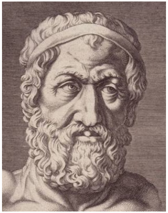
A **velocidade média** de um móvel entre dois instantes t_0 e t_1 é

$$\frac{\text{variação na posição}}{\text{variação no tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Interpretação geométrica na lousa.

Podemos calcular a **velocidade instantânea** em t_0? (ela existe? como calculá-la?)

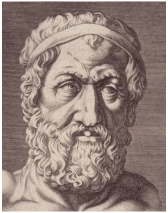
Problema 2 (paradoxo da flecha de Zenão)



Zenão de Elea
490–430 AC

"Uma flecha em voo percorre, a cada intervalo de tempo, uma fração da distância entre o arco e o alvo.

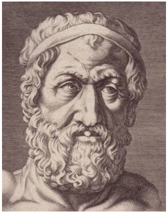
Problema 2 (paradoxo da flecha de Zenão)



Zenão de Elea
490–430 AC

"Uma flecha em voo percorre, a cada intervalo de tempo, uma fração da distância entre o arco e o alvo. Quanto menor o intervalo, menor a distância percorrida.

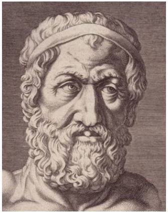
Problema 2 (paradoxo da flecha de Zenão)



Zenão de Elea
490–430 AC

"Uma flecha em voo percorre, a cada intervalo de tempo, uma fração da distância entre o arco e o alvo. Quanto menor o intervalo, menor a distância percorrida. Conforme o intervalo de tempo se torna desprezível, a distância percorrida também se torna desprezível.

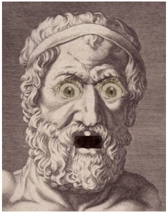
Problema 2 (paradoxo da flecha de Zenão)



Zenão de Elea
490–430 AC

"Uma flecha em voo percorre, a cada intervalo de tempo, uma fração da distância entre o arco e o alvo. Quanto menor o intervalo, menor a distância percorrida. Conforme o intervalo de tempo se torna desprezível, a distância percorrida também se torna desprezível. Ou seja, a cada instante a flecha está parada. Logo, nenhuma flecha nunca atingirá um alvo."

Problema 2 (paradoxo da flecha de Zenão)



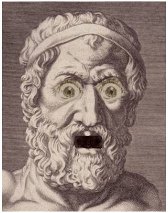
Zenão de Elea
490–430 AC

"Uma flecha em voo percorre, a cada intervalo de tempo, uma fração da distância entre o arco e o alvo. Quanto menor o intervalo, menor a distância percorrida. Conforme o intervalo de tempo se torna desprezível, a distância percorrida também se torna desprezível. Ou seja, a cada instante a flecha está parada. Logo, nenhuma flecha nunca atingirá um alvo."

A conclusão é claramente errada, portanto há algum erro em algum passo do raciocínio. Onde? Como corrigir o erro?

Introdução

Problema 2 (paradoxo da flecha de Zenão)



Zenão de Elea
490–430 AC

"Uma flecha em voo percorre, a cada intervalo de tempo, uma fração da distância entre o arco e o alvo. Quanto menor o intervalo, menor a distância percorrida. Conforme o intervalo de tempo se torna desprezível, a distância percorrida também se torna desprezível. Ou seja, a cada instante a flecha está parada. Logo, nenhuma flecha nunca atingirá um alvo."

A conclusão é claramente errada, portanto há algum erro em algum passo do raciocínio. Onde? Como corrigir o erro?
Resposta: a variação do deslocamento em um intervalo de tempo desprezível (ou seja, que **tende a zero**), é a **velocidade instantânea**. Ela nem sempre é nula (só é nula se a flecha estiver, de fato, parada.)

Questões:

- como definir a velocidade instantânea, essa relação entre a variação no deslocamento e a variação no tempo quando o tempo **tende a zero**?

Introdução

Questões:

- como definir a velocidade instantânea, essa relação entre a variação no deslocamento e a variação no tempo quando o tempo **tende a zero**?
- dada uma função posição $s(t)$ e um instante de tempo t_0, como calcular a velocidade $v(t_0)$?

Questões:

- como definir a velocidade instantânea, essa relação entre a variação no deslocamento e a variação no tempo quando o tempo **tende a zero**?
- dada uma função posição $s(t)$ e um instante de tempo t_0, como calcular a velocidade $v(t_0)$?
- problema inverso: dada uma função velocidade $v(t)$ qualquer (não necessariamente constante), podemos determinar a distância percorrida entre dois instantes t_0 e t_1?

Questões:

- como definir a velocidade instantânea, essa relação entre a variação no deslocamento e a variação no tempo quando o tempo **tende a zero**?
- dada uma função posição $s(t)$ e um instante de tempo t_0, como calcular a velocidade $v(t_0)$?
- problema inverso: dada uma função velocidade $v(t)$ qualquer (não necessariamente constante), podemos determinar a distância percorrida entre dois instantes t_0 e t_1?

A busca pela resposta a estas questões nos dará uma ferramenta de inúmeras utilidades (não só para contas envolvendo velocidades), chamada **cálculo infinitesimal**.

Esboço de definição da velocidade instantânea

Seja $s(t)$ uma função posição, t_0 um instante de tempo e h um intervalo de tempo positivo.

Aproximaremos a velocidade instantânea $v(t_0)$ por

$$v(t_0) \approx \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

para valores **tão pequenos de** h **quanto se queira**. O valor exato de $v(t_0)$ será o valor para o qual a fração **tende** a medida que h **tende** a zero.

Ou seja, definiremos,

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Esboço de definição da velocidade instantânea

Seja $s(t)$ uma função posição, t_0 um instante de tempo e h um intervalo de tempo positivo.

Aproximaremos a velocidade instantânea $v(t_0)$ por

$$v(t_0) \approx \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

para valores **tão pequenos de h quanto se queira**. O valor exato de $v(t_0)$ será o valor para o qual a fração **tende** a medida que h **tende** a zero.

Ou seja, definiremos,

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(h)$$

Esboço de definição da velocidade instantânea

Seja $s(t)$ uma função posição, t_0 um instante de tempo e h um intervalo de tempo positivo.

Aproximaremos a velocidade instantânea $v(t_0)$ por

$$v(t_0) \approx \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

para valores **tão pequenos de** h **quanto se queira**. O valor exato de $v(t_0)$ será o valor para o qual a fração **tende** a medida que h **tende** a zero.

Ou seja, definiremos,

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(h)$$

(lê-se $v(t_0)$ é o **limite** de $f(h)$ quando h **tende** a zero, para $f(h) = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$)

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se podemos fazer "$f(x)$ tão próximo de L quanto se queira" sempre que "x está próximo de a (mas não igual)."

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se podemos fazer "$f(x)$ tão próximo de L quanto se queira" sempre que "x está próximo de a (mas não igual)."

Para medir "proximidade" entre dois valores reais a e b, precisamos medir a **distância entre dois pontos a e b na reta real**:

$$d(a, b) = |a - b|$$

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se podemos fazer "$f(x)$ tão próximo de L quanto se queira" sempre que "x está próximo de a (mas não igual)."

Para medir "proximidade" entre dois valores reais a e b, precisamos medir a **distância entre dois pontos a e b na reta real**:

$$d(a, b) = |a - b|$$

Escolhido um número real, diga que a e b estão próximos se $|a - b|$ for menor que esse número real.

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se podemos fazer "$f(x)$ tão próximo de L quanto se queira" sempre que "x está próximo de a (mas não igual)."

Para medir "proximidade" entre dois valores reais a e b, precisamos medir a **distância entre dois pontos a e b na reta real**:

$$d(a, b) = |a - b|$$

Escolhido um número real, diga que a e b estão próximos se $|a - b|$ for menor que esse número real.
Para nossa definição de limite, precisaremos de dois números reais, que chamaremos de ϵ e δ

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se. . .

. . . podemos fazer "$f(x)$ tão próximo de L quanto se queira" sempre que "x está próximo de a (mas não igual)."

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se. . .

. . . podemos fazer "$f(x)$ tão próximo de L quanto se queira" sempre que "x está próximo de a (mas não igual)."

. . . "$|f(x) - L| < \epsilon$" sempre que "$0 < |x - a| < \delta$."

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se...

... "$|f(x) - L| < \epsilon$" sempre que "$0 < |x - a| < \delta$."

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se...

... "$|f(x) - L| < \epsilon$" sempre que "$0 < |x - a| < \delta$."

$$\ldots 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se...

$$\ldots 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para todo número real $\epsilon > 0$, existe algum número real $\delta > 0$ tal que a implicação abaixo é válida

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição de limite

Dados uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e números reais a e L, dizemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para todo número real $\epsilon > 0$, existe algum número real $\delta > 0$ tal que a implicação abaixo é válida

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

ATENÇÃO: cuidado com a interpretação das expressões "para todo" e "existe algum." Se ajudar, lembre dos símbolos usados em lógica (vistos em bases matemáticas):

- "para todo" $= \forall$
- "existe algum" $= \exists$

Exemplo

Exercício. Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Primeiro, vamos explorar o valor de $f(x)$ para x próximo de 1. (na lousa)

Exemplo

Exercício. Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Primeiro, vamos explorar o valor de $f(x)$ para x próximo de 1. (na lousa)

Depois, vamos usar a definição para demonstrar formalmente.

▸ Ir para solução.

Exemplo

Exercício. Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Primeiro, vamos explorar o valor de $f(x)$ para x próximo de 1. (na lousa)

Depois, vamos usar a definição para demonstrar formalmente.

Ir para solução.

Observações:

- a parte exploratória inicial **não é** necessária, mas às vezes ajuda com a solução (e às vezes não).
- a formalização da demonstração **é obrigatória** (neste caso, usando apenas a definição, mas veremos outras técnicas formais para demonstrar o valor de um limite)

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

Limite e o domínio de uma função

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 1/2$ e $f(1) = 1/2$

Limite e o domínio de uma função

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x\to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x\to 1} f(x) = 1/2$ e $f(1) = 1/2$
- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x\to -1} f(x)$ é indefinido e $f(-1)$ é indefinido

Limite e o domínio de uma função

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 1/2$ e $f(1) = 1/2$
- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to -1} f(x)$ é indefinido e $f(-1)$ é indefinido
- para $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 & \end{cases}$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ mas $f(0) = 1$ (demonstre em casa)

Limite e o domínio de uma função

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 1/2$ e $f(1) = 1/2$
- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to -1} f(x)$ é indefinido e $f(-1)$ é indefinido
- para $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ mas $f(0) = 1$ (demonstre em casa)
- para $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, temos $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ mas $f(0)$ é indefinido

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x\to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x\to 1} f(x) = 1/2$ e $f(1) = 1/2$
- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x\to -1} f(x)$ é indefinido e $f(-1)$ é indefinido
- para $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ mas $f(0) = 1$ (demonstre em casa)
- para $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, temos $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ mas $f(0)$ é indefinido
- para $f(x) = \lfloor x \rfloor$, temos $\lim_{x\to 3} f(x)$ indefinido mas $f(3) = 3$ definido

Limite e o domínio de uma função

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 1/2$ e $f(1) = 1/2$
- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to -1} f(x)$ é indefinido e $f(-1)$ é indefinido
- para $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 & \end{cases}$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ mas $f(0) = 1$ (demonstre em casa)
- para $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$, temos $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ mas $f(0)$ é indefinido
- para $f(x) = \lfloor x \rfloor$, temos $\lim_{x \to 3} f(x)$ indefinido mas $f(3) = 3$ definido

Limite e o domínio de uma função

Note que não necessariamente há relação entre o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ (se estiver definido) e o valor de $f(a)$.

- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 1/2$ e $f(1) = 1/2$
- para $f(x) = \frac{1}{x+1}$, temos $\lim_{x \to -1} f(x)$ é indefinido e $f(-1)$ é indefinido
- para $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 \text{ se } x = 0 \end{cases}$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ mas $f(0) = 1$ (demonstre em casa)
- para $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$, temos $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ mas $f(0)$ é indefinido
- para $f(x) = \lfloor x \rfloor$, temos $\lim_{x \to 3} f(x)$ indefinido mas $f(3) = 3$ definido

Funções onde há relação entre limite e valor da função no mesmo ponto serão estudadas em mais detalhes adiante.

Limite e o domínio de uma função

Em princípio, as cinco possibilidades abaixo são válidas:

$\lim_{x \to a} f(x)$	$f(a)$
indefinido	indefinido
indefinido	y (definido)
L (definido)	indefinido
L (definido)	y (definido), mas $y \neq L$
L (definido)	y (definido) e $y = L$

É preciso analisar **formalmente** o limite e o valor da função **para cada valor de** a **dado**, de maneira a determinar em qual situação nos encaixamos **para aquele valor de** a.

Primeira Propriedade

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Primeira Propriedade

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$.

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_2| < \epsilon$

Primeira Propriedade

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_2| < \epsilon$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$.

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_2| < \epsilon$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Veja que:

$$|L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

Primeira Propriedade

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_2| < \epsilon$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Veja que:

$$|L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - L_2| < \epsilon$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Veja que:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_2| < \epsilon$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Veja que:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

Ou seja, $|L_1 - L_2| < 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

Primeira Propriedade

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L_2| < \epsilon$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Veja que:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

Ou seja, $|L_1 - L_2| < 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Como $L_1 \neq L_2$, a diferença entre eles não pode ser menor do que qualquer número real positivo, uma contradição!

Primeira Propriedade

Teorema. (Unicidade do limite) Se o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existir, ele é único.

Demonstração. (Por redução ao absurdo) Sejam $L_1 \neq L_2$ números reais tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$. Isto quer dizer que, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - L_1| < \epsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f(x) - L_2| < \epsilon$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \epsilon$ e $|f(x) - L_2| < \epsilon$. Veja que:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

Ou seja, $|L_1 - L_2| < 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Como $L_1 \neq L_2$, a diferença entre eles não pode ser menor do que qualquer número real positivo, uma contradição! Isto quer dizer que $L_1 = L_2$. ■

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer.

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer. Veja que $|f(x) - c| = 0$ sempre,

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer. Veja que $|f(x) - c| = 0$ sempre, logo $|f(x) - c| < \epsilon$

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer. Veja que $|f(x) - c| = 0$ sempre, logo $|f(x) - c| < \epsilon$, portanto vale a implicação $0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - c| < \epsilon$. ∎

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer. Veja que $|f(x) - c| = 0$ sempre, logo $|f(x) - c| < \epsilon$, portanto vale a implicação $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$. ∎

Teorema. Seja $f(x) = x$ a função identidade. Então $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer. Veja que $|f(x) - c| = 0$ sempre, logo $|f(x) - c| < \epsilon$, portanto vale a implicação $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$. ∎

Teorema. Seja $f(x) = x$ a função identidade. Então $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta = \epsilon$.

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer. Veja que $|f(x) - c| = 0$ sempre, logo $|f(x) - c| < \epsilon$, portanto vale a implicação $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$. ∎

Teorema. Seja $f(x) = x$ a função identidade. Então $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta = \epsilon$. Neste caso, a implicação $0 < |x - a| < \delta$ equivale a $0 < |f(x) - a| < \epsilon$.

Teorema. Seja $f(x) = c$ uma função constante. Então $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ qualquer. Veja que $|f(x) - c| = 0$ sempre, logo $|f(x) - c| < \epsilon$, portanto vale a implicação $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$. ∎

Teorema. Seja $f(x) = x$ a função identidade. Então $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta = \epsilon$. Neste caso, a implicação $0 < |x - a| < \delta$ equivale a $0 < |f(x) - a| < \epsilon$. Logo, se $0 < |x - a| < \delta$ é verdade, então $|f(x) - a| < \epsilon$. ∎

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Então:

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

Regras algébricas dos limites

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Então:

- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Regras algébricas dos limites

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Então:

- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- Se $M \neq 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Então:

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- Se $M \neq 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$
- Se n é natural, $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$

Regras algébricas dos limites

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Então:

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- Se $M \neq 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$
- Se n é natural, $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$
- Se n é ímpar, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Regras algébricas dos limites

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- Se $M \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$
- Se n é natural, $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = L^n$
- Se n é ímpar, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- Se n é par e $L > 0$, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Teorema. Sejam f, g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Então:

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- Se $M \neq 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$
- Se n é natural, $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$
- Se n é ímpar, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- Se n é par e $L > 0$, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

ATENÇÃO! Cuidado com as condições! Ambos os limites **tem que estar definidos no ponto** a! Algumas regras precisam de condições adicionais!

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{x} = 2.$

Solução na lousa.

Usando as regras algébricas

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x} = 2$.

Solução na lousa.

Exercício. Demonstre que, se $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$, então $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

Usando as regras algébricas

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x} = 2$.

Solução na lousa.

Exercício. Demonstre que, se $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$, então $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

Solução. Note que $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$ e use regras algébricas.

Exercício. Demonstre que $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x} = 2.$

Solução na lousa.

Exercício. Demonstre que, se $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Solução. Note que $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$ e use regras algébricas.

Exercício. Tente usar **apenas** as regras algébricas para demonstrar que $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{2x-6} = 3.$

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x} = 2$.

Solução na lousa.

Exercício. Demonstre que, se $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$, então $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

Solução. Note que $|f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}$ e use regras algébricas.

Exercício. Tente usar **apenas** as regras algébricas para demonstrar que $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{2x-6} = 3$.

Aqui esbarramos num problema: o limite do denominador é nulo, logo não podemos aplicar a regra do quociente. Felizmente, uma nova regra pode nos ajudar.

Mais uma regra

Teorema. Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Mais uma regra

Teorema. Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Demonstração. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $x \neq a$. Logo, $f(x) = g(x)$, o que implica que as desigualdades $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ são equivalentes. ∎

Mais uma regra

Teorema. Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Demonstração. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $x \neq a$. Logo, $f(x) = g(x)$, o que implica que as desigualdades $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ são equivalentes. ■

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 3$.

Mais uma regra

Teorema. Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Demonstração. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $x \neq a$. Logo, $f(x) = g(x)$, o que implica que as desigualdades $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ são equivalentes. ■

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 3$.

Solução. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x - 6} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}$.

Mais uma regra

Teorema. Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Demonstração. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $x \neq a$. Logo, $f(x) = g(x)$, o que implica que as desigualdades $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ são equivalentes. ■

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 3$.

Solução. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x - 6} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}$. Note que $g(x)$ é igual a $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$ a menos que $x = 3$ (neste ponto, $f(3) = 3$, mas $g(3)$ é indefinido pois há divisão por zero).

Mais uma regra

Teorema. Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Demonstração. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $x \neq a$. Logo, $f(x) = g(x)$, o que implica que as desigualdades $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ são equivalentes. ■

Exercício. Demonstre que $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 3$.

Solução. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x - 6} = \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{2(x - 3)}$. Note que $g(x)$ é igual a $f(x) = \dfrac{x + 3}{2}$ a menos que $x = 3$ (neste ponto, $f(3) = 3$, mas $g(3)$ é indefinido pois há divisão por zero).

Podemos demonstrar que $\lim_{x \to 3} f(x) = 3$ por regras algébricas, e usar o teorema acima para concluir que $\lim_{x \to 3} g(x) = 3$. ■

Mais um Exemplo

Exercício. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Exercício. Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Dica: multiplique e divida pelo conjugado.

O conjugado de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, e vice-versa.

Mais um Exemplo

Exercício. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Dica: multiplique e divida pelo conjugado.

O conjugado de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, e vice-versa.

A resposta tem que ser $\frac{1}{2}$.

Para casa

- Do livro do Stewart, 5a edição, leia **apenas estas seções nesta ordem**
  - 2.1 toda
  - 2.4, lendo até o parágrafo após o exemplo 2 (antes de limites pela esquerda/direita)
  - 2.3, lendo até o exemplo 6
  - **NÃO LEIA** a seção 2.2. Repito: **NÃO LEIA!**
- Guia de cálculo do prof. Vinícius Cifú, seções 3.1 a 3.4. http://professor.ufabc.edu.br/~vinicius/guiacalc.pdf
- Vídeos da Unicamp:
  - Limite - parte 1
  - Limite - parte 2
  - Regras de Cálculo de Limite - parte 1
  - Regras de Cálculo de Limite - parte 2
- Lista 9: 1, 2, 3, 4, 5, 8 e 9.

Voltar **Solução.** Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Voltar **Solução.** Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Queremos demonstrar: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

Voltar **Solução.** Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

Queremos demonstrar: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

Quando é verdade que $\left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$?

Voltar **Solução.** Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Queremos demonstrar: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \ \Rightarrow \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

Quando é verdade que $\left|\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \epsilon$?

Em casa, divida nos casos: (1) $0 < \epsilon < 1/2$ e (2) $\epsilon \geq 1/2$.

No **caso (1)**, veja que a solução é $\dfrac{1-2\epsilon}{2\epsilon+1} < x < \dfrac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$.

Voltar **Solução.** Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Queremos demonstrar: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

Quando é verdade que $\left|\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \epsilon$?

Em casa, divida nos casos: (1) $0 < \epsilon < 1/2$ e (2) $\epsilon \geq 1/2$.

No **caso (1)**, veja que a solução é $\dfrac{1-2\epsilon}{2\epsilon+1} < x < \dfrac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$. Note que queremos falar algo sobre $x-1$, então $\dfrac{-4\epsilon}{1+2\epsilon} < x-1 < \dfrac{4\epsilon}{1-2\epsilon}$.

Voltar **Solução.** Seja $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Demonstre que $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Queremos demonstrar: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$$

Quando é verdade que $\left|\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \epsilon$?

Em casa, divida nos casos: (1) $0 < \epsilon < 1/2$ e (2) $\epsilon \geq 1/2$.

No **caso (1)**, veja que a solução é $\dfrac{1-2\epsilon}{2\epsilon+1} < x < \dfrac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$. Note que queremos falar algo sobre $x-1$, então $\dfrac{-4\epsilon}{1+2\epsilon} < x-1 < \dfrac{4\epsilon}{1-2\epsilon}$.

Tome $\delta = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$, então $0 < |x-1| < \delta$ implicará $|f(x) - 1/2| < \epsilon$

Para o **caso (2)** tome $\delta = 1$ e veja que $0 < |x-1| < 1$ implica $|f(x) - 1/2| < \epsilon$. ■