Bases Matemáticas

Aula 1 – Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

Prof. Rodrigo Hausen

24 de junho de 2014

Definição

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é *verdadeira* ou *falsa*, mas não simultaneamente ambas.

Valor Verdade: *verdadeiro* , *falso*

Exemplos 2 As seguintes frases são exemplos de proposições.

- "$2 + 5 = 7$";
- "A função $f(x) = -x$ é uma função crescente".
- "$2^{25^{9876}} + 3^{4576}$ é primo";
- "$\sqrt{17}$ é irracional"

Exemplos 3 Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor verdadeiro ou falso.

- "Vamos dançar!"
- "Como você está?".

Exemplos 3 Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor verdadeiro ou falso.

- "Vamos dançar!"
- "Como você está?".
- "Esta sentença é falsa".

Exemplos 3 Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor verdadeiro ou falso.

- "Vamos dançar!"
- "Como você está?".
- "Esta sentença é falsa".
- "Está quente hoje".

Exemplos 3 Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor verdadeiro ou falso.

- "Vamos dançar!"
- "Como você está?".
- "Esta sentença é falsa".
- "Está quente hoje".
- "O Cruzeiro é o melhor time do mundo;"

Em diversas situações precisamos que o "sujeito" das proposições seja uma variável que possa ser substituída por um elemento qualquer dentre uma coleção de objetos $\mathbb{U}$ em consideração. O conjunto $\mathbb{U}$ neste caso será denominado **universo do discurso**, ou ainda, **domínio de discurso** .

Proposições que dependam de uma ou mais variáveis são denominadas **proposições abertas**.
$p(x), q(x), p(x, y), \ldots$

Exemplo $p(x) =$ "$x^2 < 9$".

O valor verdade de uma proposição aberta depende do valor atribuído à variável x.

Se $x = 2$ então $p(2) =$ "$4 < 9$" tem valor verdade *verdadeiro*, por outro lado se considerarmos $x = 4$ temos que $p(4) =$ "$16 < 9$ " tem valor verdade *falso*.

Definição

O conjunto dos valores de x para os quais a proposição aberta $p(x)$ *verdadeira* é denominado **conjunto verdade** de $p(x)$.

Exemplos 5

- O conjunto verdade de $p(x) ="x$ é primo e $3 < x < 14"$ é $\{5, 7, 11, 13\}$
- O conjunto verdade de $p(x) ="x$ é real e $x^2 + 1 = 5"$ é $\{-2, 2\}$

Quantificadores

Através de proposições abertas podemos fazer afirmações sobre todos os elementos de um conjunto usando o **quantificador universal** $\forall$ que é lido como "para todo" ou "qualquer que seja". Também é possível fazer afirmações sobre a existência de um

elemento de um conjunto usando o **quantificador existencial** $\exists$, que é lido como "existe".

Nesse contexto, uma proposição é dita *universal* se faz referência a *todos* os objetos do universo $\mathbb{U}$. Caso contrário, é dita *particular* .

Assuma que o universo é o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$.

1. "Todos os números naturais são ímpares" é uma proposição universal.
2. "O número 2 é par" é uma proposição particular.
3. "Nenhum número natural é primo" é uma proposição universal, pois equivale a dizer que "todo número natural tem a propriedade de não ser primo.
4. "Há números naturais pares" é uma proposição particular.
5. "Ao menos dois números naturais são pares" é uma proposição particular.
6. "O número natural 0 é menor ou igual do que qualquer número natural" é uma proposição particular.
7. "Todo número natural é maior ou igual do que o número natural 0" é uma proposição universal.
8. "$n < n+1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$" é uma proposição universal.
9. "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$" é uma proposição particular.

Considere uma proposição universal do tipo *todo elemento de* $\mathbb{U}$ *satisfaz a propriedade* p.

Um **exemplo** para essa proposição é um elemento do universo $\mathbb{U}$ que satisfaz a propriedade p.

Um *contra-exemplo* para essa proposição é um elemento do universo $\mathbb{U}$ que *não* satisfaz a propriedade p.

Exemplos 6

1. Considere a proposição "para todo $n \in \mathbb{N}$ par, $(n+1)^2$ é ímpar".
   - Neste caso o número 2 é um exemplo dessa proposição, pois está no domínio do discurso e $(2+1)^2 = 9$ é impar.
   - Já o número 3 não é nem exemplo nem contra-exemplo, pois não pertence ao domínio de discurso.
2. Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m^2 - m + 41$ é primo.
   - Neste caso 1 é um exemplo, pois $1 \in \mathbb{N}$ e $1^2 - 1 + 41 = 41$ é primo. Bem como 2,...,40 são exemplos
   - Por outro lado, 41 é contra-exemplo, pois $41 \in \mathbb{N}$ e $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo.

Exemplos 7

1. O número 5 é um exemplo para a proposição "Todo número natural é ímpar", enquanto que o número 2 é um contra-exemplo.
2. O número 4 é um exemplo para a proposição "Nenhum número natural é primo", enquanto que o número 3 é um contra-exemplo (lembre, nesse caso, que a propriedade universal alegada pela proposição é *não* ser primo).
3. O número 8 é um exemplo para a proposição "O quadrado de todo natural é maior do que 4", enquanto que o número 1 é um contra-exemplo.

Comportamento do Valor Verdade

	“para todo” $\forall$	“existe” $\exists$
existem exemplos	inconclusivo	verdadeira
nao existem exemplos	—	falsa
existem contraexemplos	falsa	inconclusivo
nao existem contraexemplos	verdadeira	—

Definição

Dadas duas proposições p, q:

- a proposição composta p *ou* q é chamada **disjunção** de p e q. A disjunção p *ou* q é *verdadeira* quando pelo menos uma das proposições p ou q forem *verdadeiras*. Caso contrário o valor verdade de p *ou* q é *falso*.
- a proposição composta p *e* q é chamada **conjunção** das proposições p e q. A conjunção p *e* q é *verdadeira* somente quando as proposições p e q forem ambas *verdadeiras*. Caso contrário o valor verdade de p *e* q é *falso*.

Definição

Dado uma proposição p, a negação de p é uma proposição com valor verdade invertido, chamada de **negação** de p, denotada *não* p e que pode ser lida como "não p" ou "não é verdade p".

Sejam p, q proposições. Então são válidas as seguintes regras de negação

1. A negação da proposição *p e q* é (*não p*) *ou*(*não q*)
2. A negação da proposição *p ou q* é *não p e não q*

Exemplos 10

- A negação da proposição "x é divisível por 2 e 3" é "x não é divisível por 2 ou x não é divisível por 3".
- A negação da proposição "x é divisível por 2 ou 3" é "x não é divisível por 2 e x não é divisível por 3".
- A negação da proposição "b é soma de quadrados ou b é primo" é a afirmação que "b não é soma de quadrados e b não é primo".
- A negação da proposição "x é maior que 2 *ou* x é menor igual que -1 " é a proposição " x é menor igual a 2 *e* x é maior que -1."

Negação do Quantificador

Seja $p(x)$ um proposição aberta. Então são válidas as seguintes regras de negação:

- A negação da proposição "para todo x em D é verdade $p(x)$" é a proposição "existe pelo menos um x em D tal que não é verdade $p(x)$".
- A negação da proposição "existe x em D tal que é verdade $p(x)$" é a proposição "para todo x em D não é verdade $p(x)$".

Converta as seguintes afirmações para a forma simbólica e diga quais são as suas negações:

- Todos os números naturais podem ser decompostos como produtos de primos.
- Existe inteiro n tal que $n + 3 = 4$.

Solução na lousa

Definição

Dadas duas proposições p e q então podemos construir a proposição "se p então q" que também pode ser lida como "p implica q", que denotaremos por

$$p \Rightarrow q.$$

A implicação $p \Rightarrow q$ é *falsa* somente no caso que a proposição p é *verdadeira* e a proposição q é *falsa*.

Numa implicação, $p \Rightarrow q$, a proposição p é denominada **hipótese** ou e a proposição q é denominada **tese, conclusão ou consequente** da implicação.

A tabela a seguir apresenta o valor verdade de $p \Rightarrow q$ em função dos valores verdades de p e q.

p	q	$p \Rightarrow q$
verdadeiro	*verdadeiro*	*verdadeiro*
verdadeiro	*falso*	*falso*
falso	*verdadeiro*	*verdadeiro*
falso	*falso*	*verdadeiro*

Tabela: Tabela Verdade da Implicação.

Qual o valor verdade das seguintes implicações?

- Se 2 é um número par, então 3 é um número ímpar.
- Se 2 é um número par, então 4 é um número ímpar.
- Se 2 é um número ímpar, então 3 é um número par.
- Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

Dada uma proposição $p \Rightarrow q$ então:

- a proposição $q \Rightarrow p$ é chamada de **recíproca** da proposição;
- a proposição *não* $q \Rightarrow$ *não* p é chamado de **contrapositiva**;
- a proposição *não* $p \Rightarrow$ *não* q é chamado de **inversa** da proposição.

Uma afirmação e sua contrapositiva são equivalentes!